

Ra Ximhai

Revista de Paz, Interculturalidad y
Democracia

Ra Ximhai
Universidad Autónoma Indígena de México
ISSN: 1665-0441
México

2015

MODELACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE COVARIANZA ENTRE OBSERVACIONES DE UN MISMO INDIVIDUO EN MODELOS DE CURVAS DE CRECIMIENTO ARBÓREO DE MEZQUITE (*Prosopis laevigata* Humb & Bonpl. Ex Willd.) EN LA COMUNIDAD CAMPESINAS DE CHINOBAMPO, EL FUERTE, SINALOA

Elvia Nereyda Rodríguez-Sauceda y Gustavo Enrique Rojo-Martínez
Ra Ximhai, Julio-Diciembre, 2015/Vol. 11, Número 5 Edición Especial
Universidad Autónoma Indígena de México
Mochicahui, El Fuerte, Sinaloa. pp. 223-235





MODELACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE COVARIANZA ENTRE OBSERVACIONES DE UN MISMO INDIVIDUO EN MODELOS DE CURVAS DE CRECIMIENTO ARBÓREO DE MEZQUITE (*Prosopis laevigata* Humb & Bonpl. Ex Willd.) EN LA COMUNIDAD CAMPESINAS DE CHINOBAMPO, EL FUERTE, SINALOA

MODELING BETWEEN THE STRUCTURE OF COMMENTS COVARIATE SAME INDIVIDUAL GROWTH CURVE MODELS OF ARBOREO MEZQUITE (*Prosopis laevigata* Humb & Bonpl. Ex Willd.) IN THE RURAL COMMUNITY OF CHINOBAMPO, EL FUERTE, SINALOA

Elvia Nereyda **Rodríguez-Sauceda** y Gustavo Enrique **Rojo-Martínez**

Profesores Investigadores de la Universidad Autónoma Indígena de México. Correo electrónico para contacto: nery89_8@hotmail.com.

RESUMEN

Las curvas de crecimiento arbóreo son modeladas desde un punto de vista biológico (funciones no-lineales) o empírico (funciones polinomiales). Debido a que el crecimiento es evaluado mediante mediciones repetidas en el tiempo sobre un mismo árbol debe contemplarse la estructura de correlación subyacente. Se describen y comparan modelos de covarianza en la estimación de curvas de crecimiento arbóreo individuales y poblacionales.

En este trabajo, se modelan series provenientes de especies arbóreas de lento crecimiento de bosques nativos de mezquite en la comunidad campesina de Chinobampo, El Fuerte, Sinaloa. Se trabajó con Mezquite, diez árboles por especie y una serie de ancho de anillos de crecimiento por árbol. Las series fueron suavizadas mediante medias móviles para maximizar la tendencia debida al crecimiento biológico.

Se modeló la estructura de covarianza entre observaciones de un mismo individuo usando los modelos de simetría compuesta y autoregresivo para la submatriz de covarianza entre los términos de error correspondiente y también mediante la incorporación de efectos aleatorios en el modelo. Los ajustes fueron realizados en el marco de los modelos lineales mixtos y comparados a partir de funciones de la verosimilitud correspondiente. El modelo con efectos aleatorios asociados a cada parámetro de un polinomio de segundo orden resultó el más eficiente en la estimación del crecimiento en ambas especies. La incorporación de efectos aleatorios permite contemplar la alta variabilidad del crecimiento comúnmente observada entre individuos de una especie en bosques naturales.

Palabras clave: curvas de crecimiento, modelos mixtos, coeficientes aleatorios.

SUMMARY

Tree growth curves are modeled from a biological (non-linear functions) and an empirical standpoint (polynomial functions). Since tree growth is assessed using repeated measurements on the same individual at times, the underlying structure of correlation must be considered. Models of covariance are described and compared in estimating individual and population tree growth curves.

Work was done on ten individuals of Mezquite, and a series of annual rings width for every tree. Series were smoothed using movable means to maximise the trend due to biological growth.

The structure of covariance between two observations on the same individual was modeled using the compound symmetry and self-regressive models for the submatrix of covariance between the corresponding error terms and by incorporating random effects in the model as well. Adjustments were made considering the mixed lineal models and then compared with functions of the corresponding verosimilitude. The model with random effects associated to every term in a second order polynomial came out as the most efficient in estimating the growth in both species. The addition of random effects makes visible the high growth variability observed among the individuals of the same species in natural forests.

Key words: growth curves, mixed models, random coefficients.

INTRODUCCIÓN

Las muestras dendrocronológicas provenientes de la madera de especies arbóreas permiten obtener lecturas de anchos de anillos de crecimiento para cada año de vida de un árbol. Las

lecturas obtenidas desde un mismo individuo (árbol) se encuentran correlacionadas debido al efecto de individuo. La variable ancho de anillo de crecimiento en el tiempo t se presupone resume o contiene diferentes señales determinísticas, tales como la señal biológica (debido a la edad del árbol), climática (debido a la influencia del clima en el período de crecimiento t), o aquellas debidas a disturbios del bosque.

Una práctica estadística común en el tratamiento de series de anchos de anillos de crecimiento es el filtrado de la serie tendiente a maximizar la señal de interés. Las series de anchos de anillos suavizadas muestran también correlaciones debidas al proceso de filtrado en sí mismo.

Para especies arbóreas de lento crecimiento, es frecuente observar que en el período de tiempo examinado (edad de los árboles a partir de los que se obtienen las muestras dendrocronológicas) la señal debida al crecimiento biológico se puede modelar simplemente por un polinomio de bajo orden (Giménez, 1998). Cualquiera sea el modelo usado para describir la señal de crecimiento, las correlaciones entre las lecturas de ancho de anillos deben ser contempladas en la modelación.

En este trabajo, se modelan series provenientes de especies arbóreas de lento crecimiento de bosques nativos de mezquite en la comunidad campesina de Chinobampo, El Fuerte, Sinaloa.

Las series han sido suavizadas para maximizar la señal de crecimiento biológico. Se asume un modelo polinómico cuadrático para la tendencia biológica y distribución normal multivariada para las componentes aleatorias del modelo. La atención se centra en diversos modelos para la covarianza entre las lecturas de ancho de anillos de crecimiento obtenidos desde un mismo individuo.

Se siguen dos estrategias diferentes en la modelación de la estructura de covarianza: 1) a través de la matriz de varianza y covarianza de los términos de error del modelo polinomial de regresión y 2) a través de la incorporación de efectos aleatorios en el modelo polinomial de regresión.

Los efectos de los parámetros del modelo de crecimiento (coeficientes polinomiales) se consideran fijos en el primer caso. Los errores estándares y los contrastes de hipótesis contemplan la covarianza entre los términos de error asociados a observaciones realizadas sobre un mismo individuo. La información proveniente de distintos individuos se asume no correlacionada. En el segundo caso, los efectos de los parámetros del modelo de crecimiento se consideran aleatorios (Graybill, 1976; Littell *et al.*, 1996). Ambas aproximaciones se presentan en un marco unificado provisto por el modelo lineal general mixto para facilitar especificaciones de matrices de covarianzas y sus comparaciones a través de criterios comunes de bondad de ajuste.

MATERIAL Y MÉTODOS

Ubicación del área de estudio

La comunidad de Chinobampo pertenece al municipio de El Fuerte, Sinaloa, México. Está situada a 240 metros de altitud sobre el nivel del Mar, sus coordenadas geográficas son Longitud: 26° 27' 50" y su Latitud: -108° 24' 36" (Figura 1 y 2).



Figura 1.- Ubicación geográfica del estado de Sinaloa, México (INEGI, 2013).



Figura 2.- Ubicación geográfica de la comunidad de Chinobampo, El Fuerte, Sinaloa (Explorando México, 2013).

Metodología

Datos

Se analizaron 10 series de anchos de anillos de crecimiento obtenidas de muestras troncos de *Prosopis laevigata* Humb & Bonpl. Ex Wild, especie característica de la región de Chinobampo, El Fuerte, Sinaloa. Las longitudes promedios de dichas series fueron de 42 años para. Las muestras fueron procesadas en el Laboratorio de Dendrología de la Universidad Autónoma Chapingo, en la

División de Ciencias Forestales de acuerdo al procedimiento descrito por Giménez, 1998 y Moglia, 1999).

Las series de lecturas de anchos de anillos de crecimiento (incrementos radiales) fueron suavizadas para eliminar las variaciones de alta frecuencia, las cuales se atribuyen al clima y/o a disturbios del bosque y maximizar la tendencia biológica o aquella debida a la edad del árbol, objetivo de la modelación. Después del suavizado se eliminaron algunos árboles en cada especie por presentar un patrón muy apartado con respecto al esperado para una tendencia biológica de crecimiento.

Modelación del crecimiento arbóreo en el marco del modelo Mixto.

El modelo lineal mixto

La forma general de la ecuación de un modelo mixto es:

$$Y = X\beta + Zu + e,$$

Donde Y es un vector $n \times 1$ de variables aleatorias observables (datos), X y Z son matrices de diseño conocidas, β es un vector $p \times 1$ de efectos paramétricos asumiendo valores fijos (efectos fijos), u es un vector $m \times 1$ de variables aleatorias (efectos aleatorios) y e es un vector $n \times 1$ de términos de error aleatorios. Los vectores u y e se suponen con distribución normal multivariada con esperanza cero y matriz de covarianza G (de orden $m \times m$) y R (de orden $n \times n$) respectivamente. Además se asume que $Cov(u, e) = 0$. Así se tiene que $V(Y) = ZGZ' + R$.

Si G y R son conocidas, V es conocida, las soluciones (por mínimos cuadrados generalizados) para estimar β representan el BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) de los parámetros fijos del modelo

y la solución $\hat{u} = GZ\hat{V}^{-1}(y - X\hat{\beta})$ es el BLUP (Best Linear Unbiased Predictor) de los efectos aleatorios (Searle *et al.*, 1992). En la práctica V es desconocida por lo que en una primera instancia

se estiman las componentes de varianza en G y R , obteniéndose \hat{V} para luego usar esta en reemplazo de V en la estimación de β y en la predicción de u . Bajo normalidad, la estimación de los componentes de varianza y covarianza puede realizarse por procedimientos basados en la función de máxima verosimilitud (Hayman, 1960, Harville, 1977). La función de máxima verosimilitud restringida (REML) (Patterson y Thompson, 1971) es usualmente preferida para obtener estimadores de componentes de varianza en el marco de un modelo mixto (Khuri *et al.*, 1998).

Para seleccionar uno de varios modelos mixtos factibles generalmente se utiliza la prueba del cociente de máxima verosimilitud si los modelos son anidados (Litell *et al.*, 1996). Utilizando máxima verosimilitud restringida como procedimiento de estimación, la prueba demanda la evaluación del logaritmo de la máxima verosimilitud restringida (LLR) para el modelo reducido (modelo con menos parámetros) y para el modelo completo (modelo con más parámetros).

El criterio de la prueba del cociente de máxima verosimilitud es:

$$L = -2\{\text{LLR}(\text{modelo reducido}) - \text{LLR}(\text{modelo completo})\}.$$

Bajo la hipótesis nula que establece que ambos modelos no presentan diferencias significativas en el ajuste de los datos, el estadístico se distribuye como una χ^2 con grados de libertad igual a la diferencia en el número de parámetros a estimar entre ambos modelos. Si la porción correspondiente a efectos fijos de los dos modelos mixtos bajo comparación es la misma entonces esta prueba contrasta las estructuras de covarianza de ambos modelos.

Otros indicadores tales como el Criterio de Información de Akaike (AIC) (Sakamoto *et al.*, 1987) pueden ser utilizados para comparar un conjunto de modelos mixtos sin necesidad de demandar el anidamiento de los modelos.

Para calcular el criterio de Akaike, se puede usar la siguiente expresión:

$$AIC = \log(LLR) - d,$$

Donde $\log(LLR)$ es el logaritmo de la función de máxima verosimilitud restringida y d es el número de parámetros en el modelo. Según esta expresión valores mayores del índice de AIC implican un mejor ajuste.

Modelación de la covarianza entre observaciones de un mismo árbol a través de la matriz de covarianza de los términos de error. Asumimos que un modelo polinomial de segundo orden para la tendencia biológica de crecimiento constituye la porción relacionada a efectos fijos de un modelo mixto, donde no se introduce ningún efecto aleatorio en \mathbf{u} .

Llamando Σ_i a la matriz de varianza-covarianza de las observaciones proveniente del i -ésimo individuo (árbol) y asumiendo igual estructura de covarianza en todos los individuos, si \mathbf{Y} denota el vector obtenido al apilar las series de anchos de anillos de n árboles una debajo de otra, la varianza de \mathbf{Y} , denotada por \mathbf{V} , es:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_n \otimes \Sigma_i$$

Donde \otimes denota producto Kronecker. Asumiremos que $\Sigma_i = \mathbf{R}_i$ dado que no hay en el modelo otro efecto aleatorio distinto de aquellos en el vector de términos de error \mathbf{e} .

Las estructuras de covarianza propuestas para modelar \mathbf{R}_i fueron las siguientes: 1) modelo de independencia o modelo de componentes de varianza [CV]; 2) modelo de simetría compuesta [SC] y 3) modelo autorregresivo de primer orden [AR(1)](Jenrich, 1986).

Modelación de la covarianza entre observaciones de un mismo árbol a través de la introducción de efectos aleatorios en el modelo.

Asumimos nuevamente un modelo polinomial de segundo orden para modelar el crecimiento en función de la edad del árbol. Este crecimiento será explicado por una porción correspondiente a efectos fijos (modelo poblacional o valor esperado de la tendencia biológica de crecimiento) más un conjunto de efectos aleatorios asociados a las lecturas obtenidas desde cada árbol que conformarán el vector \mathbf{u} del modelo mixto. El número de efectos aleatorios adicionados en \mathbf{u} será

uno por individuo o uno por cada parámetro a ser estimado en la ecuación polinomial de crecimiento de cada árbol.

Llamando Σ_i a la matriz de varianza-covarianza de las observaciones proveniente del i -ésimo árbol y asumiendo igual estructura de covarianza en todos los individuos, si \mathbf{Y} denota el vector obtenido al apilar las series de anchos de anillos de n árboles una debajo de otra, la varianza de \mathbf{Y} , denotada por \mathbf{V} , es:

$$\mathbf{V} = \text{Diag}(\Sigma_i)$$

Donde $\text{Diag}(\Sigma_i)$ denota una matriz particionada diagonal, con $\Sigma_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{G}_i \mathbf{Z}_i' + \mathbf{R}_i$ con $i=1, \dots, n$ y $\mathbf{R}_i = \sigma^2 \mathbf{I}_a$.

EL BLUE de los efectos fijos contenidos en β en combinación lineal con los BLUPs de los efectos aleatorios en \mathbf{u} permiten formular un modelo de crecimiento diferente para cada individuo en la muestra (Zeger *et al.*, 1988).

Cuando sólo un término aleatorio, representando el efecto árbol, es introducido en el modelo, la estructura de \mathbf{G}_i sigue el modelo de componentes de varianza, *i.e.* $\mathbf{G}_i = \sigma_g^2 \mathbf{I}_a$ donde \mathbf{I}_a es la matriz identidad de orden a , con a igual a la longitud de la serie de anchos de anillos para el árbol i .

Nos referiremos a esta estrategia de modelación como modelo sujeto específico, [MSE].

Si se modela adicionando un término aleatorio para cada uno de los coeficientes polinómicos, la ecuación del modelo puede re-escribirse como:

$$y_{ij} = (\beta_0 + u_{i0}) + (\beta_1 + u_{i1})t + \dots + (\beta_q + u_{iq})t^q + e_{ij}$$

Donde los coeficientes β_0, \dots, β_q son constantes desconocidas que deben ser estimadas y u_{i0} es una variable no observable que representa una desviación aleatoria de la ordenada al origen de la curva de crecimiento del sujeto i -ésimo respecto β_0 , u_{i1} es otra variable que representa la desviación aleatoria del coeficiente lineal de la función de crecimiento del individuo i -ésimo respecto a β_1 y así sucesivamente hasta u_{iq} . Nos referiremos a éste como modelo de coeficientes aleatorios, [MCA]. La matriz \mathbf{G} del modelo mixto correspondiente es $\mathbf{G} = \text{Diag}(\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n)$ con $\mathbf{G}_i = \sigma_g^2 \mathbf{I}_a$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resultados

En el *Cuadro 1* se presentan los valores -2 Res Log L (menos 2 veces el logaritmo de la función de máxima verosimilitud restringida), AIC (criterio de Akaike) y MAE (media del valor absoluto de los residuos) para los ajustes de una función de crecimiento polinómica de segundo orden bajo las distintas estrategias de modelación de covarianzas entre lecturas de anchos de anillos de un mismo árbol.

Cuadro 1.- Criterios de adecuación del modelo según distintas estrategias de modelación de covarianzas entre observaciones. Variable respuesta: lectura de anchos de anillos de crecimiento en individuos de Mezquite

Especie	Criterio ¹	CV	SC	AR(1)	MSE	MCA
<i>P. laevigata</i>	-2 Res Log L	-1802	-2038	-2943	-2038	-2150
			$\chi^2_1 = 235.6$	$\chi^2_1 = 1141$		
	AIC	900	1017	1469	1017	1071
	MAE	0.027	0.027	0.028	0.021	0.017

1 -2 Res Log L: -2 veces el logaritmo de la función de máxima verosimilitud restringida; AIC: criterio de Información de Akaike; MAE : media del valor absoluto de los residuos.

χ^2_i : estadístico chi-cuadrado con i grados de libertad para la prueba que contrasta el modelo que encabeza la columna con el modelo CV; todas los contrastes de hipótesis fueron significativos para un nivel $\alpha=0.01$.

La prueba del cociente de máxima verosimilitud y AIC sugieren que todos los modelos son sustancialmente mejores que aquel que asume errores independientes es decir CV. Al modelar a través de **R**, las mejorías señaladas por estos indicadores no se vieron reflejadas en un menor MAE ni en una reversión del patrón observado en los gráficos de residuos vs. valores predichos. El modelo MSE produce idénticos valores de -2LLr y AIC que el modelo SC, ambos modelan igual estructura de covarianza para las observaciones. Sin embargo, la predicción en el modelo con efecto aleatorio de individuo mejora respecto a la del modelo fijo según muestran los valores de MAE y los gráficos de residuos vs. predichos. El MCA constituye la mejor estrategia, entre los estudiados, para modelar covarianza entre observaciones de ancho de anillos. En la *Figura 3* se presentan los gráficos de residuos vs. valores predichos por el modelo para el modelo AR (1) (modelación a través de **R**) y el modelo MCA (modelación a través de **G**).

Las estimaciones de los parámetros poblacionales realizadas en el contexto de los modelos estudiados son presentados en la *Cuadro 2*. Las diferencias se observan, como es esperado en los errores estándares y no a nivel de las estimaciones de los coeficientes de regresión.

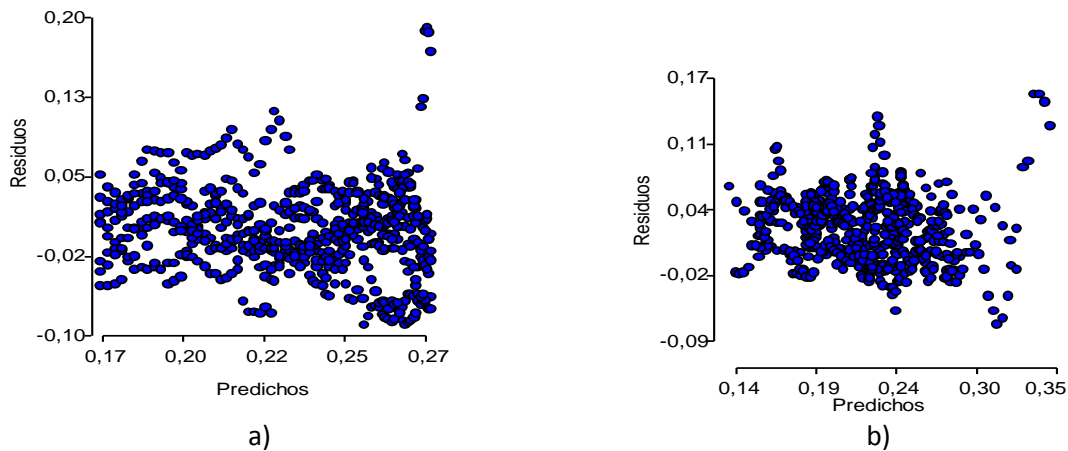


Figura 3.- Residuos vs predichos en el ajuste de modelos polinomiales de segundo orden para el crecimiento de mezquite bajo dos estrategias de modelación de covarianzas entre observaciones de un mismo árbol. (a) Modelo AR(1) para la matriz R del modelo mixto individual (b) Modelo mixto de coeficientes aleatorios, especie Prosopis laevigata.

Cuadro 2.- Estimación de parámetros del modelo de crecimiento polinomial de segundo orden bajo distintas estrategias de modelación de covarianzas. Variable respuesta: lectura de ancho de anillos de crecimiento en individuos de la especie *Prosopis laevigata*

Especie	Parámetro	SC	AR(1)	MSE	MCA
<i>Prosopis laevigata</i>	Ordenada origen (β_0)	al 0.1369 (0.0050)	0.1219 (0.0167)	0.1389 (0.0106)	0.1395 (0.0083)
	Pendiente (β_1)	0.0040 (0.0003)	0.0052 (0.0008)	0.0039 (0.0002)	0.0043 (0.0006)
	Coefficiente Cuadrático (β_2)	-0.000031 (0.000004)	-0.000048 (0.00001)	-0.000030 (0.000001)	-0.000042 (0.00001)

Valores en itálica corresponden a errores estándar de las estimaciones.

En el Cuadro 3 se listan los BLUPS de los efectos aleatorios para *Prosopis laevigata*.

Los ajustes polinomiales para las series de árboles individuales bajo el modelo MCA para la estructura de covarianza, se presentan en la Cuadro 4. Los mismos fueron obtenidos por adicionar las desviaciones aleatorias predichas (BLUPs) a las correspondientes estimaciones de los coeficientes de regresión poblacional (efectos fijos).

Cuadro 3.- BLUPs de efectos aleatorios en los modelos sujeto específico (MSE) y de coeficiente aleatorio (MCA). Variable respuesta: lectura de ancho de anillos de crecimiento en individuos de la especie *Prosopis laevigata*

Especie	BLUP ¹	MSE	MCA
<i>Prosopis laevigata</i>	árbol 1	0.027687	B ₀ =-0.00669107 B ₁ = 0.00231917 B ₂ =-0.00002832
	árbol 3	-0.03174	B ₀ =-0.02729811 B ₁ = 0.00091321 B ₂ =-0.00002694
	árbol 4	0.00991	B ₀ =-0.00083869 B ₁ = 0.00048655 B ₂ =-0.00000303
	árbol 5	-0.01221	B ₀ =-0.01339742 B ₁ =-0.00082073 B ₂ = 0.00001770
	árbol 6	-0.01428	B ₀ = 0.01504932 B ₁ =-0.00201545 B ₂ = 0.00002526
	árbol 7	0.03832	B ₀ = 0.02923961 B ₁ =-0.00090251 B ₂ = 0.00002626
	árbol 9	-0.01767	B ₀ = 0.00393636 B ₁ = 0.00001975 B ₂ =-0.00001093

1 Best Linear Unbiased Predictor.

Cuadro 4.- Curvas de crecimiento de árboles individuales de para un modelo polinomial cuadrático con coeficientes aleatorios

Árbol	<i>Prosopis laevigata.</i>
1	$y_{ij}^1 = 0.1328 + 0.0066 t - 0.0001 t^2$
3	$y_{ij} = 0.1122 + 0.0052 t - 0.0001 t^2$
4	$y_{ij} = 0.1387 + 0.0048 t - 0.00004 t^2$
5	$y_{ij} = 0.1261 + 0.0035 t - 0.00002 t^2$
6	$y_{ij} = 0.1545 + 0.0023 t - 0.00001 t^2$
7	$y_{ij} = 0.1687 + 0.0034 t - 0.00001 t^2$
9	$y_{ij} = 0.1434 + 0.0043 t - 0.00005 t^2$

1 yij j-ésima lectura de ancho de anillo de crecimiento o incremento radial suavizado para el individuo i, t edad del árbol en la que se registra el ancho de anillo j-ésimo.

Discusión

Los modelos empíricos polinomiales han sido ampliamente usados para modelar el crecimiento de especies leñosas (Vanclay, 1994). Polinomios de bajo orden han servido para ajustar curvas de crecimiento de quebrachos en el Chaco Árido Argentino (Giménez y Ríos, 1999). Tradicionalmente, los ajustes de curvas de crecimiento en leño de especies que componen bosques naturales se han realizado suponiendo independencia no sólo entre observaciones de distintos árboles sino también entre observaciones provenientes de un mismo individuo (Giménez, 1998; Giménez y Ríos, 1999; Moglia, y López, 1995; Moglia, 1999). El suavizado realizado sobre las series para maximizar las tendencias de interés (Fritz, 1976) hacen cuestionar aún más ese supuesto de independencia. En algunos trabajos, el enfoque multivariado para la modelación de observaciones repetidas en el tiempo ha sido utilizado para modelar curvas de crecimiento (Vonesh y Chinchilli, 1997). La aproximación multivariada puede ser muy costosa a nivel del número de parámetros que hay que estimar cuando las series de datos individuales son largas (Hand y Taylor, 1987). Otros modelos más parsimoniosos (con menos parámetros) deberían adecuarse mejor a la modelación del crecimiento arbóreo en bosques naturales del Chaco Árido ya que usualmente el número de árboles a considerar es menor que en plantaciones y la longitud de las series es relativamente mayor por tratarse de especies longevas de lento crecimiento. La disminución del número de parámetros a estimar en la modelación de estructuras de varianzas y covarianzas, asociadas a modelos de curvas de crecimiento, es de especial interés en la modelación del crecimiento en leño de quebrachos (Juárez de Galíndez, 2001).

La reducción de la dimensionalidad de un modelo de curva de crecimiento se puede realizar a través de la modelación con patrones más estructurados de la matriz de varianza y covarianza de los términos de error y/o mediante la incorporación de efectos aleatorios (de individuos) en el modelo. Ambas aproximaciones, permiten obtener modelos para la matriz de varianza-covarianza entre observaciones, que consideran las correlaciones seriales esperadas entre observaciones provenientes de un mismo individuo. En este trabajo, la modelación de la estructura de covarianza subyacente en series de anchos de anillos individuales se realizó mediante la especificación de modelos alternativos expresados como distintas parametrizaciones del modelo mixto lineal

general asumiendo un modelo polinomial de segundo orden para la tendencia de crecimiento y distribución normal para los términos aleatorios. Dado que la porción sistemática de los ajustes fue siempre un polinomio cuadrático y que se asume independencia entre series individuales, los criterios aplicados para la selección de modelos permitieron comparar los efectos de las distintas estructuras de covarianza propuestas para la modelación de las correlaciones entre observaciones provenientes de un mismo individuo. Wolfinger (1993) utiliza estos criterios con el mismo propósito.

Entre las aproximaciones para modelar las correlaciones seriales de las observaciones obtenidas sobre un mismo árbol se usó la estructura autoregresiva o estructura de autocorrelación (Azen y Affiffi, 1972) para las submatrices de \mathbf{R} (matriz de varianza y covarianza de los términos de error) involucrando las observaciones realizadas sobre un mismo árbol. El modelo de autocorrelación implica que todos los pares de medidas separadas por igual número de mediciones tienen la misma correlación (Crowder y Hand, 1990). Su ocurrencia tiene sentido en caso de equiespaciamento entre los valores de la variable independiente, situación común en series de anchos de anillos de crecimiento ya que cada anillo corresponde a un año de crecimiento. El modelo autoregresivo puede ser homocedástico o heterocedástico de acuerdo las componentes de varianza de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza asuman el mismo o diferentes valores respectivamente (Littell et al., 1996). Estadísticas descriptivas de series de anchos de anillos de crecimientos usualmente sugieren mayores varianzas para anchos de anillos mayores (Juárez de Galíndez, 2001). Si bien, la estimación de modelos heterocedásticos es más apropiada, persiguiendo parsimonia y debido a la extensa longitud de las series, los modelos para la estructura de covarianza de curvas de crecimiento discutidos asumen series estacionarias. Un modelo autoregresivo de orden 1, resultó significativamente mejor que el modelo de independencia entre observaciones provenientes de un mismo árbol. Los procesos autoregresivos han sido valorados por otros autores en la modelación de dependencias de crecimientos seriales en bosques de leñosas (Fritz, 1976). Otro modelo, aún más parsimonioso, usado para contemplar correlaciones de observaciones obtenidas sobre un mismo individuo fue el correspondiente a la estructura de simetría compuesta (Grizzle y Allen, 1969). Esta estructura arrojó resultados que si bien fueron superiores respecto al modelo de independencia o modelos de componente de varianza, no evidenciaron un ajuste mejor al obtenido con los modelos autoregresivos de la especie estudiada.

En los modelos conteniendo efectos aleatorios, la matriz \mathbf{R} del modelo mixto es la matriz tradicionalmente utilizada en ajuste de curvas de crecimiento (independencia) y las covarianzas entre observaciones son introducidas vía la matriz \mathbf{G} del modelo mixto subyacente. Se incorporan como términos del modelo, para explicar la lectura de ancho de anillo asociada con el i -ésimo individuo en la edad t , uno o más efectos aleatorios además del usual término de error. Las curvas de crecimiento obtenidas varían de individuo a individuo. En el modelo sujeto específico (Zegger et al., 1988), a la estimación del modelo poblacional se le adiciona un nuevo término aleatorio que predice el efecto de individuo. En el modelo de coeficientes aleatorios (Graybill, 1976), cada coeficiente del modelo polinomial ajustado para el individuo k -ésimo es obtenido adicionando a la estimación de cada coeficiente poblacional el BLUP del efecto aleatorio asociado a dicho coeficiente para el árbol en cuestión. Lindstrom y Bates (1990) modelaron el crecimiento de árboles (en plantaciones) con un modelo logístico mixto que consideraba las variaciones entre individuos a nivel del crecimiento máximo alcanzado mediante la incorporación de una variable aleatoria con propiedades distribucionales del tipo especificado en este trabajo para cada coeficiente aleatorio asociado a un parámetro de la ecuación polinomial. Ellos también

encuentran, que la incorporación de estos términos otorga la flexibilidad necesaria al modelo logístico como para eliminar la necesidad de ajustar formas funcionales diferentes para árboles de un mismo rodal.

En este trabajo, los efectos aleatorios se obtuvieron a partir de la resolución de las ecuaciones del modelo lineal mixto (ecuaciones normales extendidas) las cuales involucran a la matriz de varianza-covarianza de las observaciones estimada mediante el procedimiento de máxima verosimilitud restringida (Searle *et al.*, 1992). Luego los predictores de efectos aleatorios corresponden a BLUPS empíricos.

El modelo sujeto específico describió la estructura de varianza-covarianza de las observaciones de un mismo individuo de la misma manera que cuando se usa el modelo de simetría compuesta para R , coincidiendo con lo observado por otros autores (Littell *et al.*, 1996). Sin embargo la predicción del crecimiento con un modelo con efectos aleatorios fue mejor que la obtenida con el modelo de simetría compuesta vía R . Dicho comportamiento fue atribuido a la participación del BLUP del efecto aleatorio de individuo en la obtención de los valores predichos. Los valores de MAE se redujeron en más de un 50% al usar el modelo de coeficientes aleatorios respecto a las predicciones obtenidas a través de la modelación de la matriz de errores de un modelo de efectos fijos. Los resultados sugieren que todos los parámetros del modelo polinomial, i.e. aquéllos relacionados con el crecimiento inicial, la velocidad de crecimiento y la disminución del mismo en edades avanzadas, son altamente variables entre árboles de una misma especie. El modelo de coeficientes aleatorios permite contemplar dicha variabilidad y produce mejores predicciones en curvas de crecimiento individuales.

CONCLUSIONES

La introducción de coeficientes aleatorios en la modelación de curvas de crecimiento modela covarianzas entre observaciones provenientes de un mismo individuo introduciendo suficiente flexibilidad a la ecuación polinomial como para modelar la alta variabilidad existente entre individuos de una misma especie. La flexibilidad otorgada por esta vía no adolece de los efectos negativos que pueden derivarse del uso de modelos sobreparametrizados que incluyen parámetros de forma (Campbell y Madden, 1990). La interpretación de los coeficientes de regresión de la ecuación de crecimiento, en los modelos con efectos aleatorios, es la misma que la realizada en un modelo con estructura de covarianza simple. Luego, estos modelos que permiten obtener mejores predicciones y realizar comparaciones de curvas de crecimiento poblacionales con errores estándares apropiados no presentan mayor complejidad para realizar interpretaciones forestales que modelos basados en el cuestionado supuesto de independencia.

LITERATURA CITADA

- Azen, S. P. y A. A. Afifi. 1972. Asymptotic and small-sample behavior of estimated Bayes rules for classifying time-dependent observations. *Biometrics*, 28, 989-998.
- Campbell, C.L. y Madden, L.V. 1990. Introduction to plant disease epidemiology. A Wiley Interscience publication, 6, 184-188.

- Crowder, M. J. y D. J. Hand. 1990. Analysis of Repeated Measures. London: Chapman And Hall.
- Fritz, H. 1976. Tree rings and climate. Academic Press. New York, 320 p.
- Giménez, A. M. (1998). Influencia de la Edad sobre caracteres anatómicos y el crecimiento de *Schinopsis quebracho colorado* Engl., Anacardiaceae. Tesis Doctoral.
- Giménez, A.M.; Ríos N.A.(1999). Crecimiento de *Schinopsis Quebracho colorado* (Schlecht.) Barkl et meyer, Anacardiaceae. Madera y Bosques 5(2). 35-51.
- Graybill, F. A. 1976. Theory and Application of the Linear Model. Wadsworth Publishing Company. 704 pp.
- Grizzle, J. E. y D. M. Allen. 1969. Analysis of growth and dose response curves. Biometrics, 25,357-381.
- Hand D.J. y Taylor C.C. 1987. Multivariate analysis of variance and repeated Measures. Chapman and Hall, London.
- Harville, D. A. 1977. Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. J. Amer. Stat. Assoc. 72:320-340.
- Hayman, B. I. 1960. Maximum likelihood estimation of genetic components of variation. Biometrics 16, 369-381.
- Jenrich, R. L. y M. D. Schluchter. 1986. Unbalanced repeated-measures models with structures covariance matrices. Biometrics 42:805-820
- Juárez de Galindez, M. 2001. Modelización estadística de curvas de crecimiento de árboles en bosques nativos: Quebracho colorado, Quebracho blanco y Algarrobo blanco. Tesis para optar al grado académico de Magíster.
- Karlin, U., Catalán, L., Coirini, R. 1994. La Naturaleza y el Hombre en el Chaco Seco. Proyecto GTZ, Salta, 163 p.
- Khuri, A. I.; T. Mathew y B. K. Sinha. 1998. Statistical tests for mixed linear models. Wiley series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc. New York. 352pp.
- Lencinas, J. D. 1993. Análisis epidométrico de árboles dominantes de Quebracho colorado y estudio de la estructura del rodal en el Chaco Seco. Trabajo Final de la carrera de Ingeniería Forestal.
- Lindstrom, M. y Bates, D. 1990. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. Biometrics 46, 673-687.
- Littell, R. C.; G. A. Milliken; W.W. Stroup y R. D. Wolfinger. 1996. SAS System for Mixed Models. Cary, N.C.: SAS Institute Inc. 633pgs.

- Moglia de Lugones, J. G. 1999. Variabilidad de los caracteres anatómicos del leño de *Aspidosperma quebracho blanco* (Schelkt), Apocinácea. Tesis doctoral.
- Moglia de Lugones, J. G. y C. López. 1995. Crecimiento radial en *Aspidosperma quebracho blanco*. Informe anual. CICYT. UNSE.
- Patterson, H. D. y R. Thompson. 1971. Recovery of interblock information when block sizes are unequal. *Biometrika* 58, 545-554.
- Perpiñal, E., Balzarini, M., Catalán, L., Pietrarelli, L., Karlin, U. 1995. Edad de Culminación del crecimiento en *Prosopis flexuosa* D. C. en el Chaco Arido Argentino. *INIA*, 4 (1), 45-55.
- Sakamoto, Y.; M. Ishiguro y G. Kitagawa. 1987. Akaike Information Criterion Statistics. KTK Scientific Publisher, Tokyo, Japan.
- Searle, S. R.; G. Casella y C. H. Mc Culloch. 1992. Variance components. Wiley, New York.
- Vanclay, J. (1994). Modelling Forest Growth and Yield. Applications to mixed Tropical Forests. *Cab International*, 311 p.
- Vonesh, E. y Chinchilli, V. 1997. Linear and nonlinear models for the analysis of repeated measurements. *Statistic textbooks and Monographs*. Vol. 154. Ed. Marcel Dekker, Inc. New York, 560 p.
- Wolfinger, R. D. y O'Connell, M. 1993. Generalized linear mixed models: a pseudo-likelihood approach. *J. Statist. Comput. Simul.* 48:233-243.
- Zeger, S. L.; K. Y. Liang y P. S. Albert. 1988. Models for longitudinal data: A generalized estimating equation approach. *Biometrics* 44:1049-1060.

Síntesis curricular

Elvia Nereyda Rodríguez Saucedo

Profesora Investigadora de la Universidad Autónoma Indígena de México. Correo electrónico para contacto: nery89_8@hotmail.com

Gustavo Enrique Rojo Martínez

Profesor Investigador de la Universidad Autónoma Indígena de México.